IES GONZALO NAZARENO

RECUPERACIÓN DEL GLOBAL DE ÁLGEBRA.- 3 2º Bach. Ciencias. Marzo 2004

1. Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$. Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

1'5 puntos

2. ¿ Para qué valores de a y b será compatible el sistema $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y-z=b \end{cases}$ ¿ Será determinado?

1 puntos

3. Dado el sistema siguiente: $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+y+z=-b \\ x-ay+z=b \end{cases}$ .Discute según los valores de a y b y resuélvelo para un caso de compatible indeterminado. **3 puntos**

4. Sabiendo que B es una matriz de orden 4 y que $|B|=2$, calcula:

$|Adj\ B|$, $|B^3|$, $|B \cdot B^t|$ **1'5 puntos**

5. Escribe **razonadamente:**

- un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas compatible indeterminado y tal que cambiándole un solo número se haga compatible determinado.
- un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas compatible determinado y tal que cambiándole un solo número se haga incompatible **1'5 puntos**

6. Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa: $\begin{cases} 2x+y=2 \\ y+3z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

1'5 puntos

SOLUCIONES A LA RECUPERACIÓN DE ÁLGEBRA 3.-

1. Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5. \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overset{F2-7F1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}} = \frac{5}{2}$ ya que podemos extraer el factor ½ de la tercera fila, que multiplica a todo el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

(1) Por descomposición de un determinante en dos debido a la 1ª fila que es suma de dos términos y por ser el segundo determinante 0, por $F_3 = -2F_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \cdot \overset{F2-2F3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}} = 5 \cdot 2 = 10$$

2. Tomamos la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2, ya que hay menores de orden 2 distinto de 0, por lo tanto **r(A)= r(A')=2** , así pues este sistema siempre será compatible para cualesquiera de los valores de a y de b.

Pero sin embargo, nunca será determinado porque los rangos son iguales pero < nº de incógnitas.

---

3. Tomemos la matriz A de los coeficientes del sistema. A $= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 1 \quad y \quad a = -1$. Vamos a discutir según estos valores.

- Si **a =1**, $r(A|A') = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -b-4 \\ 0 & -2 & 0 & b-4 \end{array}\right) \Rightarrow$ para que sea compatible –b-4 = 0 $\Rightarrow$ b = -4 $\Rightarrow$ si a =1 y b = -4 el sistema es compatible indeterminado pues r(A) = r (A') = 2< nº de incógnitas. Si a = 1 y b $\neq$ -4, r(A)= 2 y r (A')=3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

- Si **a =-1**, $r(A|A') = r\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} r\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -b+4 \\ 0 & 2 & 2 & b+4 \end{array}\right) =$

$$= F_3 - F_2 \; r\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} Si\ b = 0,\ r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow Sistema\ \ Comp.\ \ Indeterminado \\ Si\ \ b \neq 0,\ r(A) = 2\ \ \ r(A') = 3,\ \ Sistema\ \ incompatible \end{cases}$$

- **Si a $\neq$ 1 y a $\neq$ -1** $\Rightarrow$ r(A)=r (A')=3 Sistema compatible determinado.

Resolvemos ahora para a =1, b =-4

$$r(A|A') = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{=}} r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -b-4 \\ 0 & -2 & 0 & b-4 \end{array}\right) \Rightarrow$$ Para b = -4, la segunda ecuación

se puede tachar y nos queda: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ -2y=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\alpha \\ y=4 \quad \alpha\in\Re \\ z=\alpha \end{array}$

4.

- $|Adj.B|$.De la definición de $B^{-1}=\frac{1}{|B|}(Adj.B)^t \Rightarrow |B|\cdot B^{-1}=(Adj.B)^t$ y aplicando

determinante $\left||B|\cdot B^{-1}\right|=|Adj.B|$ por la propiedad de los determinantes $|A|=|A|^t$, aplicamos ahora otra propiedad, $\left||B|\cdot B^{-1}\right|=|Adj.B| \Rightarrow \left|2\cdot B^{-1}\right|=|Adj.B| \Rightarrow$ (*) $2^4\cdot\left|B^{-1}\right|=|Adj.B| \Rightarrow |Adj.B|=8$ ya que $|B|^{-1}=\frac{1}{|B|}$

(*) Del determinante sale 2^4 porque está multiplicando a todas las filas o columnas que son 4.

- $\left|B^3\right|=|B|^3=8$ ya que el determinante de un producto de dos matrices es el producto de los determinantes respectivos.
- $\left|B\cdot B^t\right|=|B|\cdot\left|B^t\right|=4$, aquí hemos aplicado las propiedades antes referidas.

5.

- $(1)\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \quad (2)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ En (1), el r(A) = 1 = r(A') . Sistema Compatible Indeterminado

En (2), el r(A) = 2 = r(A') . Sistema Compatible determinado

- . $(1)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \quad (2)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ (1) es el sistema (2) anterior y en (2)

$r(A)=2 \quad y \quad r(A')=3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

6. El sistema se expresa como A · X = B, así $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

calculamos $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(AdjA)^t$, $|A|=2$ A_{11}= -2, A_{12} = 6, A_{13} = -2, A_{21} = -1, A_{22} = 2, A_{23} = 0, A_{31} =3,

A_{32} =-6, A_{33} = 2 $\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$